

# Integrazione di un sistema inerziale con misure satellitari

Tommaso COZZOLINO\*\*, Salvatore GAGLIONE \*\*, Vincenzo NASTRO\*\*, Raffaele SANTAMARIA\*\*

(\*\*) Istituto di Navigazione “G. Simeon”. Università degli Studi di Napoli “Parthenope” – [navigaz@uniparthenope.it](mailto:navigaz@uniparthenope.it)

**Sommario:** *I sistemi di navigazione inerziale presentano importanti vantaggi ma anche serie limitazioni dovute agli errori di posizione che aumentano col tempo. Anche il sistema GPS può essere, in alcuni casi, soggetto ad azioni di disturbo o non può fornire buone precisioni quando la geometria dei satelliti non è ottimale o quando il numero di essi è insufficiente. Di conseguenza appare evidente l'importanza di una integrazione tra i due sistemi. Il presente articolo descrive una soluzione per tale integrazione e i vantaggi che ne derivano.*

**Abstract:** *The stand-alone inertial systems present advantages but also severe limitations owing to unbounded position errors as well as GPS presents limitations such as poor geometry, dynamic noise and satellite masking; consequently the integration of GPS receivers into existing inertial navigation systems appears very attractive. This paper describes a design approach to such integration and the corresponding advantages.*

## Introduzione

La navigazione inerziale è un sistema di navigazione autonomo capace di fornire la posizione, la velocità e l'assetto di un veicolo senza alcun riferimento esterno ma soltanto in base all'elaborazione di misure effettuate a bordo dello stesso veicolo.

A fronte di queste caratteristiche, la dinamica del sistema comporta errori che crescono col tempo; di conseguenza esso è in grado di fornire buone risposte a breve termine rendendosi pertanto necessario ricorrere a rifasamenti periodici mediante aiuti esterni.

I sistemi satellitari, in particolare il sistema *GPS*, sono in grado di fornire misure di elevata precisione che, tuttavia, possono essere suscettibili di azioni di disturbo o di interferenze e possono essere degradate o in seguito a manovre del veicolo tali da porre l'antenna in posizione non idonea o quando il numero dei satelliti in vista è inferiore a quello necessario per ottenere la posizione.

L'integrazione tra inerziale e satellitare rappresenta pertanto una soluzione ideale assicurando una precisione giammai inferiore a quella che si otterrebbe usando un solo di essi con il vantaggio di disporre di un sistema in grado di fornire parametri che il *GPS*, da solo, non è in grado di assicurare.

Il legame numerico tra questi è rappresentato dal Filtro di Kalman che conduce sempre ad una soluzione ottimale attraverso un procedimento iterativo. Si rende necessario sviluppare un modello del sistema di navigazione, cioè un insieme di relazioni lineari che legano le variabili di stato attuali con quelle relative a un istante precedente (*estrapolazione*) e, in modo analogo, è necessario che le misure necessarie per migliorare la stima (*aggiornamento*) siano legate alle variabili di stato attraverso relazioni anch'esse lineari.

In definitiva con tale integrazione si ottiene un sistema di navigazione, il cui componente primario è dato dall'inerziale, capace di seguire con grande precisione la dinamica del veicolo a breve termine mentre l'intervento di misure satellitari, con una periodicità che va da qualche secondo ad un minuto, previene l'accumulo degli errori dell'inerziale assicurando precisioni superiori a quelle che si sarebbero conseguite utilizzando componenti separati.

L'integrazione tra i due viene qui di seguito effettuata con una configurazione a circuito aperto (*feed forward configuration*): alle variabili di stato fornite dall'inertiale vengono apportate correzioni esterne al sistema stesso; pertanto, col passare del tempo, le condizioni nominali (fornite dall'inertiale) si discostano sempre di più da quelle reali a causa degli errori di cui è soggetto. Pertanto una tale configurazione può essere adottata per brevi periodi (come nel caso della navigazione aerea) in quanto un'eccessiva divergenza delle condizioni nominali rispetto a quelle reali pregiudicherebbe il procedimento di linearizzazione sul quale si basa l'algoritmo di Kalman.

### Modello degli errori del sistema inerziale

Lo stato  $\mathbf{X}$  di un sistema inerziale, variabile nel tempo, è definito dalle variabili:

$$\mathbf{X} \equiv (\mathbf{P}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\psi})^T \quad [1]$$

dove:

- $\mathbf{P}$  è la posizione, definita dalla latitudine  $\varphi$ , dalla longitudine  $\lambda$  e dalla quota  $h$ ;
- $\mathbf{V}$  è la velocità, definita dalle tre componenti  $V_e, V_n, V_z$  lungo una terna il cui asse  $x$  è diretto per est, l'asse  $y$  per nord e l'asse  $z$  lungo la verticale verso l'alto (*terna ENU*);
- $\boldsymbol{\psi}$  è l'assetto rappresentato dal disallineamento della piattaforma (analogica o digitale) intorno agli assi della terna *ENU* ( $\psi_e, \psi_n, \psi_z$ ).

La dinamica con cui varia nel tempo lo stato di un sistema è data dall'equazione:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = f[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)] \quad [2]$$

dove con il vettore  $\mathbf{U}$  vengono indicate le perturbazioni cui è soggetto il sistema.

Nel caso di un sistema inerziale la [2] viene esplicitata dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{V} \\ \dot{\mathbf{V}} &= \mathbf{f} + \mathbf{c} + \mathbf{g} + \boldsymbol{\varepsilon}_a \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} &= (\boldsymbol{\omega}_c - \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\psi}) + \boldsymbol{\varepsilon}_g \end{aligned} \quad [3]$$

dove:

- $\mathbf{f}$  rappresenta le misure effettuate dai tre accelerometri;
- $\mathbf{c}$  le correzioni, fornite dal calcolatore, necessarie per eliminare le accelerazioni non dovute al moto del veicolo (accelerazioni centripeta e di Coriolis);
- $\mathbf{g}$  l'accelerazione di gravità;
- $\boldsymbol{\varepsilon}_a$  gli errori di misura degli accelerometri;
- $\boldsymbol{\omega}$  la deriva alla quale devono essere sottoposti i giroscopi per mantenere la piattaforma orizzontale;
- $\boldsymbol{\omega}_c$  la deriva alla quale sono sottoposti i giroscopi attraverso il proprio *torquer*;
- $\boldsymbol{\varepsilon}_g$  gli errori di deriva dei giroscopi.

Le equazioni [3] non sono lineari; a tal fine esse possono essere sostituite da equazioni che descrivono la dinamica con la quale si evolve il sistema rispetto a uno stato  $\mathbf{X}^*$ , detto *nominale*, rappresentato dallo stesso sistema inerziale.

Pertanto alle variabili  $\mathbf{X}$  vanno sostituite le variabili  $\mathbf{x}$  che rappresentano le differenze tra lo stato  $\mathbf{X}$  e quello nominale  $\mathbf{X}^*$ , ovvero gli errori del sistema inerziale:

$$\mathbf{x} \equiv (\delta\varphi, \delta\lambda, \delta h, \delta V_e, \delta V_n, \delta V_z, \delta\psi_e, \delta\psi_n, \delta\psi_z)^T$$

Si ottiene un sistema di equazioni differenziali del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t) \quad [4]$$

dove  $\mathbf{F}$  è una matrice che esprime la dinamica con la quale gli errori si evolvono e  $\mathbf{w}$  le variabili di ingresso ipotizzate come rumori bianchi.

La matrice  $\mathbf{F}$ , di dimensioni  $n \times n$  (essendo  $n$  il numero delle variabili di stato), si ottiene effettuando le derivate parziali della funzione  $f$  rispetto alle variabili di stato  $\mathbf{X}$  considerando le condizioni nominali. La [4], per intervalli discreti, può essere scritta sotto la forma:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{\Phi}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n \quad [5]$$

essendo  $\mathbf{\Phi}$  una matrice  $n \times n$ , detta *matrice di transizione*, operatore lineare che permette di convertire lo stato da un istante  $t_n$  ad un istante successivo  $t_{n+1}$ . La matrice  $\mathbf{\Phi}$  può essere facilmente ricavata dalla matrice  $\mathbf{F}$ .

### Misure satellitari

Informazioni sullo stato del sistema  $\mathbf{X}$  si possono ottenere effettuando delle misure  $\mathbf{Y}(t)$  correlate alle variabili di stato  $\mathbf{X}(t)$  dalla relazione non lineare:

$$\mathbf{Y}(t) = h[\mathbf{X}(t)] \quad [6]$$

dove  $\mathbf{Y}(t)$  è il vettore misura di dimensioni  $m \times 1$  (generalmente  $m \neq n$ ).

Per rendere lineare tale equazione si segue lo stesso procedimento usato per l'equazione di stato. Indicano con  $\mathbf{Y}^*(t)$  le misure che si effettuerebbero nelle condizioni nominali (ovvero prendendo per buone le uscite del sistema inerziale), si sostituisce all'equazione [6] l'equazione:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad [7]$$

dove:  $\mathbf{y}(t)$  è uguale alla differenza tra  $\mathbf{Y}(t)$  e  $\mathbf{Y}^*(t)$ ;  $\mathbf{H}(t)$  è una matrice  $m \times n$  detta *matrice di misura*;  $\mathbf{v}(t)$  è un vettore  $m \times 1$  le cui componenti rappresentano gli errori commessi su ciascuna misura. La [7], così come per la [5] può essere riscritta per intervalli discreti diventando:

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{H}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n \quad [8]$$

Un ricevitore satellitare è in grado di fornire, per ciascuno dei satelliti selezionati, la differenza tra gli istanti di arrivo e di partenza di un segnale emesso dallo stesso satellite. Essendo nota la velocità di propagazione  $c$  del segnale, viene fornita la lunghezza della traiettoria percorsa dal segnale tra il satellite e l'utente al quale deve essere applicata una correzione sottrattiva per l'effetto di rifrazione subita nell'attraversamento della stratosfera e della troposfera.

Tenendo anche conto che gli orologi del satellite e, in particolare, quello dell'utente non sono sincronizzati con precisione su una comune scala dei tempi (scala dei tempi *GPS*), in realtà il ricevitore misura una *pseudo-distanza*  $\rho'_i$  uguale a:

$$\rho'_i = \rho_i + c\delta t_{ri} + c(\delta t_u - \delta t_i) \quad [9]$$

dove:  $\rho'$  è la pseudo-distanza;  $\rho_i$  è la distanza, in linea retta, tra l'utente e il satellite;  $\delta t_{ri}$  il ritardo subito a causa della rifrazione atmosferica;  $\delta t_u$  e  $\delta t_i$  gli sfasamenti degli orologi del ricevitore e del satellite rispetto alla comune scala dei tempi.

La [9], esplicitando la distanza  $\rho_i$  in funzione delle coordinate cartesiane del satellite  $(X_i, Y_i, Z_i)$  e dell'utente  $(X, Y, Z)$ , diventa:

$$\rho'_i = \sqrt{(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 + (Z - Z_i)^2} + c\delta t_{ri} + c(\delta t_u - \delta t_i) \quad [10]$$

Si noti che le coordinate ora definite sono relative ad una terna legata alla superficie terrestre (terna *ECEF*). La conoscenza delle coordinate stimate dell'utente, fornite dal sistema inerziale, consente di rendere lineare l'equazione [10] che diventa:

$$\delta \rho_i = l_i \delta X + m_i \delta Y + n_i \delta Z + c \delta t_u \quad [11]$$

dove  $l_i, m_i, n_i$  rappresentano i coseni direttori che la congiungente utente-satellite forma con gli assi della terna *ECEF*;  $\delta \rho_i$  si ottiene effettuando la differenza tra la misura di distanza effettuata dal

ricevitore satellitare (affetta dagli inevitabili errori di misura) e la stessa distanza calcolata in funzione delle coordinate del satellite e di quelle dell'utente fornite dal sistema inerziale.

### Realizzazione del sistema integrato inerziale-satellitare

A differenza di quanto finora detto, nell'applicazione che verrà mostrata non vengono considerate tra le variabili di stato quelle relative al canale verticale in quanto instabile. Si ipotizza, pertanto, che le informazioni di quota e di velocità verticale vengano fornite da altri sensori, esterni al sistema inerziale, di cui il modello degli errori non verrà considerato tra le variabili di stato. Le nove variabili di stato finora considerate si riducono, pertanto, a sette. Alle variabili  $\delta\lambda$  e  $\delta\varphi$ , inoltre, si sostituiscono i termini  $\delta x$  e  $\delta y$  (in coordinate *ENU*) considerando che:

$$\begin{aligned}\delta\lambda &= \delta x / R \cos \varphi \\ \delta\varphi &= \delta y / R\end{aligned}\quad [12]$$

Alle sette variabili di stato se ne aggiungono ulteriormente due relative allo *stato* dell'orologio del ricevitore satellitare; infatti l'orologio in dotazione del ricevitore *GPS*, necessario per effettuare le misure di distanza, non è perfettamente sincronizzato sulla scala dei tempi *GPS* ma è soggetto ad un errore sistematico e ad una deriva.

L'errore sistematico, noto come *clock bias*, espresso in metri, è indicato con  $b$  mentre la deriva, nota come *clock drift*, espressa in metri al secondo, è indicata con  $d$ . Il modello dell'errore dell'orologio è, pertanto, definito dalle seguenti equazioni:

$$\dot{b} = d + u_b; \quad \dot{d} = u_d \quad [13]$$

essendo  $u_b$  e  $u_d$  rumori bianchi tra loro indipendenti.

Pertanto le variabili di stato da considerare sono:

$$\mathbf{x} \equiv (\delta x, \delta y, \delta V_e, \delta V_n, \delta\psi_e, \delta\psi_n, \delta\psi_z, b, d)^T \quad [14]$$

La [11], che rappresenta l'equazione di misura, deve essere riferita allo stesso sistema di coordinate con cui sono state definite le variabili di stato; pertanto essa diventa:

$$\delta\rho_i = l_i \delta x + m_i \delta y + n_i \delta z + c \delta t_u \quad [15]$$

dove  $l_i, m_i, n_i$ , coseni direttori che la congiungente utente-satellite forma con gli assi della terna *ENU*, definiscono gli elementi per costruire le righe della matrice di misura  $\mathbf{H}$ .

Tali nuovi coseni direttori si ricavano dai precedenti moltiplicandoli per una matrice che consente il passaggio dalla terna terrestre *ECEF* alla terna locale *ENU*, funzione delle coordinate dell'utente.

### Equazioni del filtro di Kalman

Il procedimento di *estrapolazione* consiste nel ricavare una stima delle variabili di stato per l'istante  $t_n$  in cui viene effettuata una nuova misura; in modo analogo viene calcolata la stima  $\mathbf{P}_n^-$  della nuova matrice di covarianza degli errori. Le equazioni del ciclo di Kalman sono:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_n^- &= \Phi_{n-1} \hat{\mathbf{x}}_{n-1}^+ \\ \mathbf{P}_n^- &= \Phi_{n-1} \mathbf{P}_{n-1}^+ \Phi_{n-1}^T + \mathbf{Q}_{n-1}\end{aligned}\quad [16]$$

Effettuando una nuova serie di misure lo stato viene *aggiornato* attraverso le equazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n &= \mathbf{P}_n^- \mathbf{H}_n^T (\mathbf{H}_n \mathbf{P}_n^- \mathbf{H}_n^T + \mathbf{R}_n)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_n^+ &= \hat{\mathbf{x}}_n^- + \mathbf{K}_n (\mathbf{y}_n - \mathbf{H}_n \hat{\mathbf{x}}_n^-) \\ \mathbf{P}_n^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \mathbf{H}_n) \mathbf{P}_n^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \mathbf{H}_n)^T + \mathbf{K}_n \mathbf{R}_n \mathbf{K}_n^T \end{aligned} \quad [17]$$

essendo  $\mathbf{K}$  la matrice di Kalman i cui elementi rappresentano i *pesi* da assegnare alla differenza tra le misure effettuate e quelle stimate ed  $\mathbf{R}$  la matrice di covarianza degli errori di misura.

### Risultati della simulazione e conclusioni

La simulazione riguarda un volo lungo l'ortodromia Parigi-Mosca controllato da un sistema inerziale. Per tale sistema si è ipotizzato un disallineamento iniziale della piattaforma intorno agli assi  $x$  e  $y$  di 0.5 e intorno all'asse  $z$  di 1'; viene, infine, considerata una deriva di  $10^{-2}$  °/h per ciascuno dei tre giroscopi.

Le variabili di ingresso relative al vettore  $\mathbf{w}(t)$  sono costituite da rumori bianchi aventi le seguenti caratteristiche: per gli accelerometri, media zero e deviazione standard uguale a  $0.001 \text{ m/s}^2$ ; per i giroscopi, media zero e deviazione standard uguale a  $10^{-6} \text{ rad/s}$ . L'intervallo di integrazione  $\Delta t$  è scelto uguale a 60 s e, di conseguenza, l'indice  $n$  varia da 0 a 170.

La figura 1 mostra l'andamento degli errori di posizione e di velocità; detti errori aumentano con il tempo e presentano un periodo uguale a circa 84 minuti che corrisponde al periodo di Schuler.

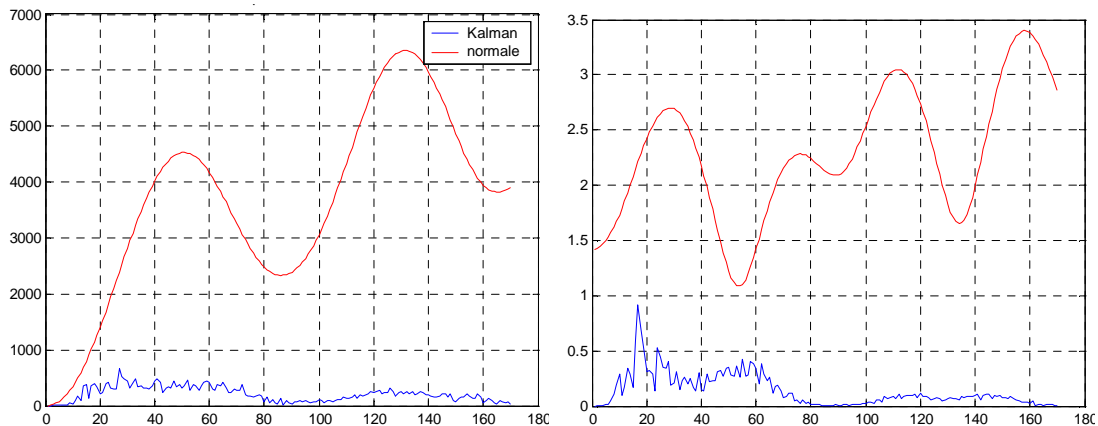


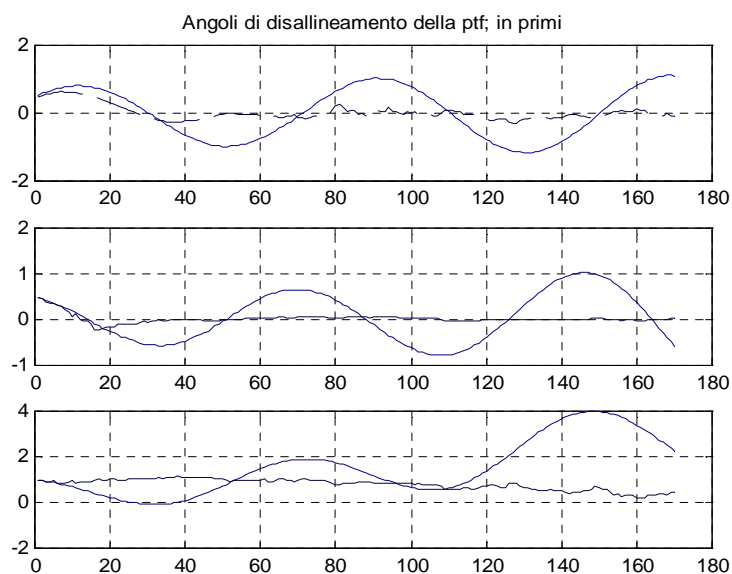
Figura 1 – Andamento degli errori di posizione e di velocità in un sistema inerziale prima e dopo l'applicazione del Filtro di Kalman

La figura 2 mostra gli angoli di disallineamento della piattaforma intorno ai tre assi della terna *ENU*; anche questi errori assumono un andamento periodico.

Sono state simulate, pertanto, misure satellitari *GPS* immaginando che il volo sia stato effettuato il 21 luglio 2004. Le effemeridi dei satelliti in formato *Rinex* sono state ricavate dal messaggio di navigazione collezionato da un ricevitore *Novatel OM3*.

Si è ipotizzato che le distanze misurate dal sistema satellitare sono affette da due errori; il primo, aleatorio, dovuto agli effetti di rifrazione atmosferica (nell'ipotesi che il modello di rifrazione si discosti da quello reale), il secondo dovuto all'errore dell'orologio del ricevitore che, come visto, presenta due contributi, uno sistematico e l'altro aleatorio.

Le figure 1 e 2 riportano l'andamento degli errori dopo l'applicazione del filtro di Kalman.



*Figura 2 – Angoli di disallineamento della piattaforma prima e dopo l'applicazione del Filtro di Kalman*

I risultati quantitativi presentati naturalmente dipendono dalla validità del modello di errori ipotizzato per il sistema; nelle applicazioni è pertanto necessario verificare sperimentalmente il comportamento di ciascuno dei due sistemi allo scopo di ricavare una buona stima delle statistiche degli errori di ciascuno di essi.

### **Bibliografia**

- Kayton M., Fried W.R., *Avionics Navigation Systems*, John Wiley & Sons, Inc., 1997.  
 Nastro V., *Navigazione inerziale e integrata*, Guida, 2004.